KOLOKWIUM Z TOPOLOGII
02.12.21

Pisząc rozwiązania można powoływać się na twierdzenia i fakty, które były sformułowane w skrypcie lub listach zadań wykładowcy. Inne zadania lub fakty należy przytaczać wraz z pełnym uzasadnieniem. Każdą kartkę, którą chce się oddać w postaci skanu należy podpisać swoim imieniem i nazwiskiem. Bardzo prosimy o przesyłanie plików w formacie .pdf

Czas pracy: 2 godz. 30 minut (wliczając w to czas na przesłanie plików)

Zadanie 1. (10 punktów)

(a) Niech $X = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej. Niech
$$A = X \cap \left((\sqrt{3}, 3) \times \left(\tfrac{1}{3}, 3 \right) \right).$$
Wyznacz domknięcie i wnętrze zbioru A w przestrzeni X.

(b) Niech B będzie następującym podzbiorem płaszczyzny:
$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \geqslant 0, \text{ oraz } \frac{1}{2n+1} < \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2n} \right\}.$$
Wyznacz domknięcie i wnętrze zbioru B w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$, gdzie d_k oznacza metrykę kolejową na płaszczyźnie.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x,y) = (x-1, y-1)$. Wyznacz zbiór punktów ciągłości funkcji f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_k)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$, gdzie d_k oznacza metrykę kolejową, zaś d_r metrykę rzeka na płaszczyźnie.

Zadanie 3. (10 punktów)

(a) Niech X będzie przestrzenią topologiczną taką, że zbiór punktów izolowanych tej przestrzeni jest trzyelementowy. Udowodnij, że nie istnieje przestrzeń topologiczna Y taka, że X jest homeomorficzna z iloczynem kartezjańskim $Y \times Y$.

(b) Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem przestrzeni topologicznych. Pokaż, że jeśli zbiór
$$\{n \in \mathbb{N} : X_n \text{ ma co najmniej dwa punkty}\}$$
jest nieskończony, to nieskończony iloczyn kartezjański
$$X_1 \times X_2 \times \dots$$
nie ma punktów izolowanych.

Zadanie 4. (6 punktów) Niech $C_b[0,\infty)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych na $[0,\infty)$ o wartościach rzeczywistych. Na $C_b[0,\infty)$ określamy metrykę supremum d_{sup}, tj.
$$d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,\infty)\}.$$

Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni $(C_b[0,\infty), d_{sup})$ złożoną z tych funkcji f, dla których istnieje granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Udowodnij, że Y jest ośrodkowa.

Wskazówka. Przypominamy następujący znany fakt, będący wnioskiem z twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji: Zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych, rozpatrywanych jako funkcje na odcinku domkniętym $[s,t]$, jest zbiorem gęstym w przestrzeni $C_b[s,t]$, ograniczonych funkcji ciągłych na $[s,t]$ o wartościach rzeczywistych.